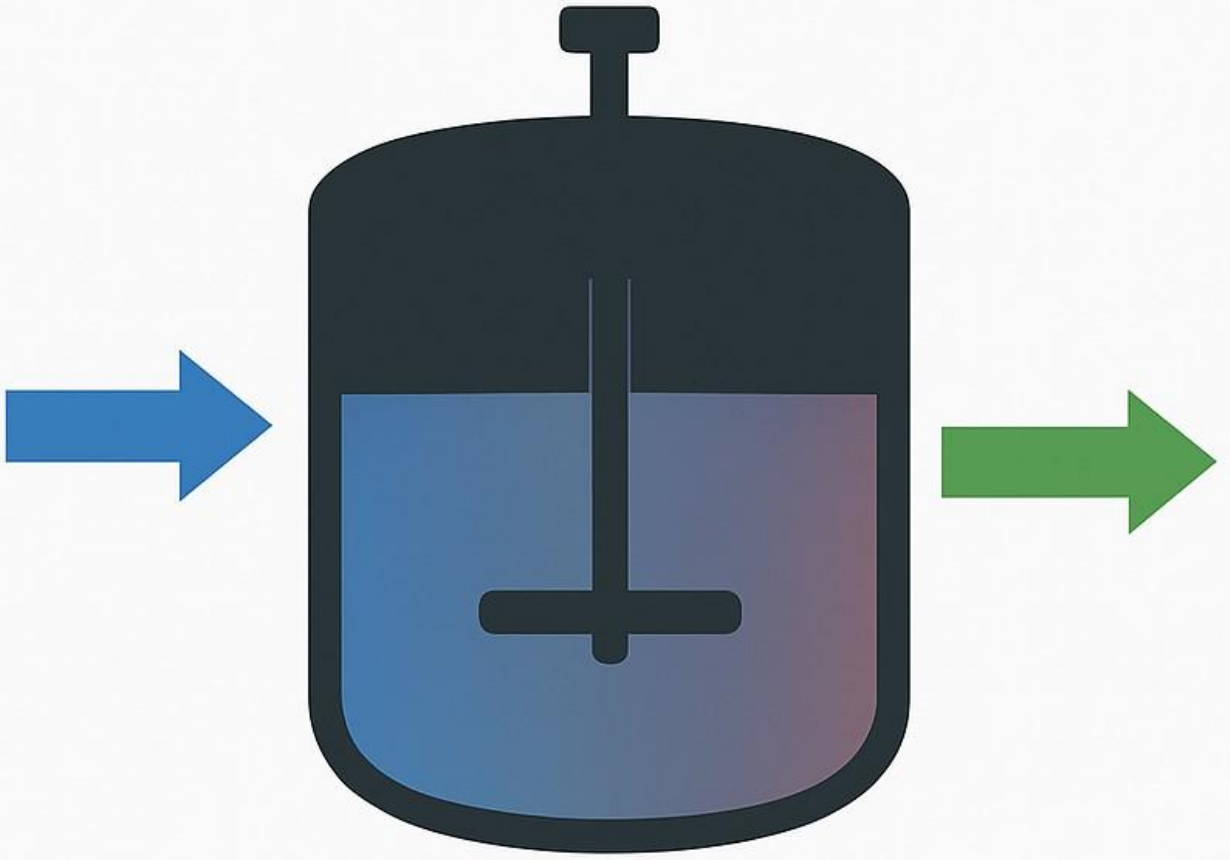
CLAUDIO HOMERO FERREIRA DA SILVA

# CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO

## APLICADO AO SISTEMA DE NEUTRALIZAÇÃO ÁCIDO-BASE



# CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO APLICADO AO SISTEMA DE NEUTRALIZAÇÃO ÁCIDO-BASE

CLÁUDIO HOMERO FERREIRA DA SILVA

Copyright © 2025 Cláudio Homero Ferreira da Silva

Todos os direitos reservados.

ISBN: 978-65-01-63967-3

# DEDICATÓRIA

Dedico a minha família: Meu Pai (Homero, in memorian), Minha Mãe (Iolanda), ao Meu Irmão Cristiano e a Minha Esposa Maria Teresinha, a quem agradeço também pela imensa paciência e companheirismo

# CONTEÚDO


1 Resumo ..... 2

2 Introdução ..... 3

3 MPC ROBUSTO ..... 3

3.1 Desigualdades Matriciais Lineares e o Controle Robusto ..... 5

4 Desenvolvimento de algoritmos de controle preditivo robusto ..... 5

4.1 Restrição de Robustez ..... 5

4.2 RMPC-MMR ..... 6

4.3 LMI-RMPC ..... 8

5 O sistema experimental ..... 10

6 Resultados e discussão ..... 12

7 Conclusões ..... 20

8 Referência Bibliográfica ..... 20

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores: Humberto Molinar Henrique, Luís Cláudio Oliveira Lopes e Luiz Renato Gomes, minhas grandes referência técnicas e mentores para Vida. Agradeço também aos grandes profissionais que me inspiraram: Electo Eduardo (em nome de quem agradeço a todo o pessoal do NEST-Unifei), Enio da Silva Peres (e ao pessoal do Laboratório de Hidrogênio-Unicamp), José Luz Silveira, Alexandre Bueno, José Alberto de Souza, Alaíse Junia Vieira Madureira, Bruno Marciano Lopes, Frederico Bruno Ribas Soares, Rodrigo Lombello e a todos os profissionais com quem tive a oportunidade de aprender e/ou ensinar…

## 1 RESUMO

A presença de incertezas no modelo matemático pode resultar em perda de desempenho da planta controlada baseada em controladores com modelo nominal ou até mesmo na instabilidade da malha fechada. A classe de controladores preditivos robustos (RMPC) é a classe de controladores preditivos que se baseiam em modelos com a consideração explícita das incertezas. Este trabalho apresenta dois algoritmos de RMPC. Um que adiciona ao problema de controle robusto, com incerteza invariante no tempo na forma de otimização mín-máx, um conjunto de restrições com garantia de estabilidade robusta. E outro que desenvolve o RMPC usando desigualdades de matrizes lineares (LMI) e incerteza na forma politópica. Estes algoritmos são avaliados pela aplicação em uma planta piloto de controle de nível e pH. Os resultados demonstram a aplicabilidade dos algoritmos RMPC desenvolvidos.



**Palavras Chaves:** controle preditivo baseado em modelos, controle preditivo de horizonte infinito, controle robusto, controle de nível e pH.



**Abstract** The presence of uncertainties in the model can result in loss of performance of the controlled plant model-based controllers with nominal or even the instability of the closed loop. The class of robust predictive controllers (RMPC) is the class of controllers that rely on predictive models with explicit consideration of uncertainties. This paper presents two algorithms RMPC. One that adds to the problem of robust control, time-invariant with uncertainty in the form of min-max optimization, a set of constraints with guaranteed robust stability. And another that develops RMPC using linear matrix inequalities (LMI) and polytopic uncertainty in the form. These algorithms are evaluated for application in a pilot plant level and pH control. The results demonstrate the applicability of the algorithms developed RMPC.



**Keywords:** model predictive control, infinite horizon model predictive control, robust control, pH and level control.

## 2 INTRODUÇÃO

O controle bem sucedido requer que se detenha algum conhecimento das características básicas do sistema em questão. Os parâmetros do controlador são ajustados com base nesse conhecimento e, quanto mais conhecimento se possui, melhor o comportamento da malha fechada. Várias são as técnicas de controle moderno que exploram o referido conhecimento sobre o sistema, destacando-se as técnicas de controle preditivo, que se baseiam em um modelo do processo que se pretende controlar. O controle preditivo robusto (RMPC) está associado com a utilização explícita de um modelo para as incertezas na formulação do cálculo da lei de controle. Os algoritmos de controle preditivo robusto diferem pela forma de representação das incertezas e pela restrição de estabilidade, além das diferenças para controladores MPC (*Model Predictive Control*) convencionais, como: índice de desempenho, a forma do modelo de representar a planta e as incertezas (Mayne *et al.*, 2000). O controle de processos com restrição é uma desafiadora questão na teoria de controle. A exigência se torna ainda maior quando se trata do projeto de controle robusto de sistemas. O problema de restrição robusta não é apenas significativo, mas um instigante problema na teoria de controle.

Dois algoritmos foram propostos neste trabalho: um que utiliza incerteza na entrada invariante no tempo com otimização mín-máx e restrição de robustez (RMPC-MMR) e outro que utiliza incerteza na forma de politopo com o problema de otimização na forma de LMI (*Linear Matrix Inequalities*) e restrição de robustez (LMI-RMPCR). Os algoritmos foram avaliados pela simulação no modelo do sistema de controle experimental e os resultados são comparados com os resultados de simulação e experimentais do algoritmo clássico IHMPC.

O sistema de pH é usado para aplicações em controle de processos, principalmente pelo forte comportamento não linear. Esse sistema além da característica não linear apresenta interação entre as entradas. A meta desse estudo foi propor algoritmos de controle preditivo robusto por construção que mantenham a estabilidade robusta e o desempenho do sistema em patamares aceitáveis. A planta experimental foi construída na Unidade Experimental da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

A Seção 2 apresenta os algoritmos de controle utilizados para a implementação descrita nesse trabalho. Na Seção 3 encontra-se a descrição resumida do sistema experimental. Os resultados de simulação com os controladores juntamente com os resultados experimentais de malha fechada com o controlador IHMPC encontram-se na Seção 4. A Seção 5 apresenta as conclusões do trabalho e finalizando encontram-se as referências bibliográficas.

## 3 MPC ROBUSTO

A razão de ser do controle MPC é sua habilidade para lidar com problemas de controle em que a computação da lei de controle *offline* seja difícil, embora outras características, como sua capacidade para controlar plantas multivariáveis, tenham sido julgadas inicialmente como características mais importantes (Mayne *et al.*, 2000). Cada aplicação impõe suas restrições. Os atuadores, por exemplo, possuem limites para aplicação de força. A habilidade em manusear as restrições de entrada, de saída e de estado interno pode ser atribuída como a mais significativa contribuição para o sucesso na aplicação industrial (Henson; Seborg, 1997; De Oliveira; Morari, 1994; Lee, 1997). Na ausência de erros de modelagem e perturbações, o controle MPC usando matrizes de pesos adequadas e horizonte de predição suficientemente longo pode ser visto como uma implementação exata da política de controle ótimo em realimentação (Løvaas *et al.*, 2009). Outras vantagens a serem consideradas são: os limites de segurança; a possibilidade de obtenção de vantagens no emprego dessa técnica em plantas não lineares sem restrição, bem como em plantas variantes no tempo; a consideração dos ruídos e dos efeitos reais do processo na formulação de restrições a serem atendidas quando da operação da planta; o melhor desempenho do controle; redução dos requerimentos de manutenção, e melhoria da flexibilidade e da agilidade (Eaton; Rawlings, 1992).

Pesquisas em robustez têm levado ao entendimento do problema e às limitações inerentes ao MPC convencional. Avanços em robustez, estimação de estado e MPC adaptativo podem contribuir para a evolução de MPC com realimentação das saídas (Mayne et al., 2000). A Figura 1 mostra as áreas de

interface com o controle MPC cujos desenvolvimentos afetam na melhoria e evolução dos controladores preditivos (Richalet, 1993; Richards, 2005).

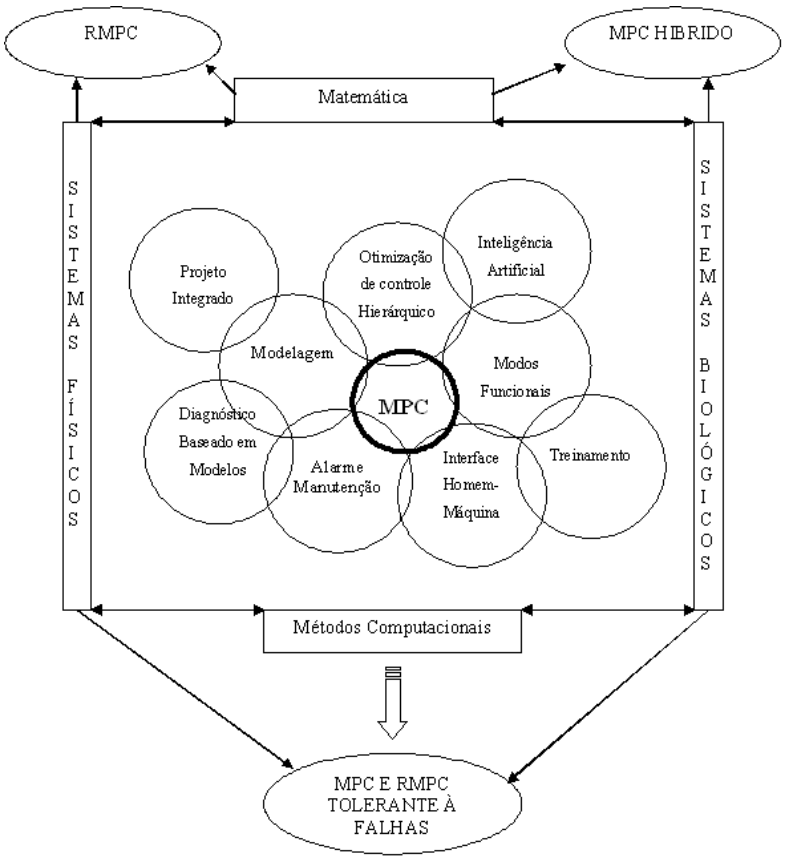



Figura 1. MPC e as áreas de desenvolvimento.

Naturalmente, quanto melhor o modelo matemático utilizado para representar as características reais da planta, mais eficiente será o esquema de controle baseado nesse modelo. Infelizmente, a complexidade do modelo matemático é diretamente ligada a sua representação real dos processos. Dessa forma, um controlador que se baseia em um modelo incorreto de um dado processo pode levar o sistema a um comportamento completamente diferente do previsto. A caracterização de um conjunto de incertezas significa encontrar uma representação matemática da incerteza do modelo, baseada no conhecimento do sistema. Em sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO) a direcionalidade da planta se configura como um problema adicional.

As incertezas podem ter muitas origens, como: parâmetros de modelo linear aproximados com erro; parâmetros do modelo linear variando devido à característica não linear dos sistemas reais associado com o ponto de operação; imperfeições na medida; modelos e estruturas desconhecidos em altas freqüências; escolha de modelos mais simples negligenciando dinâmicas como incertezas; controlador implementado diferentemente do controlador sintetizado. Como sugeriu Skogestad e Postlethwaite (1997) as principais formas de modelar incertezas são: incerteza paramétrica ou incerteza estruturada, incerteza de dinâmicas negligenciadas, incerteza distribuída e parametrização por uma lista finita de possíveis modelos (politopo). Cada forma de modelar incerteza tem as suas características, vantagens e desvantagens para aplicação nos sistemas de controle e principalmente refletem o conhecimento sobre o processo.

Nesse trabalho serão utilizadas duas formas de incerteza: paramétrica e politopo. A incerteza paramétrica refere-se a sistemas com estrutura conhecida e incerteza nos parâmetros, limitados a uma faixa conforme indicada a Equação 1, e m que G é uma função de transferência com incerteza no ganho ( $\vartheta$ ) entre valores máximos e mínimos. A forma de politopos dada pela Equação 2 (Bemporad e Morari, 1999) mostra-se de grande aplicação. Nesse caso é permitido que o sistema real varie dentro de uma família de sistemas definida por uma lista de modelos, obtém-se a chamada incerteza politópica, como apresenta a Equação 3. Esse tipo de incerteza tem sido estudado já há muitos anos e é uma ferramenta flexível e versátil para descrever sistemas com incerteza e sistemas variantes no tempo (Grieder; Parrilo; Morari, 2003). Para essa definição considera-se que **x** é o vetor de estados, **u** é o vetor de entradas, **y** é o vetor de saídas, k é o

instante de amostragem, M é o número de modelos dentro da família, **A** é a matriz do sistema, **B** é a matriz das entradas e **C** é a matriz das saídas.

$$G_S = \vartheta G_n(s); \vartheta_{mín} \le \vartheta \le \vartheta_{máx} \qquad (1)$$

$$\Pi \in \{\Pi_1 \quad \Lambda \quad \Pi_M\} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ &\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \\ &[\mathbf{A}_k \quad \mathbf{B}_k] \in \Pi \\ &\Pi = \mathrm{co}\{[\mathbf{A}_{k,1} \quad \mathbf{B}_{k,1}] \quad \Lambda \quad [\mathbf{A}_{k,M} \quad \mathbf{B}_{k,M}]\} \end{aligned} \qquad (3)$$

### 3.1 Desigualdades Matriciais Lineares e o Controle Robusto

A idéia básica das desigualdades matriciais lineares (LMI) em controle é interpretar um dado problema de controle como um problema de programação semidefinida (SDP), ou seja, um problema de otimização com objetivo linear e restrições positivas semidefinidas envolvendo matrizes simétricas que são *affine* nas variáveis de decisão. Para maiores detalhes ver Ghaoui e Niculescu (2000). As técnicas de LMI surgiram como uma ferramenta de análise em várias áreas da engenharia de controle, identificação de sistemas e projeto estrutural (Gahinet et al., 1995).

Quando as matrizes $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ são diagonais, a LMI $\mathbf{L}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ é apenas um conjunto de desigualdades lineares. As desigualdades não lineares são convertidas na forma de LMI usando o complemento Schur, conforme será descrito a seguir: a idéia básica é mostrada nas Equações. 4-5, com as matrizes na seguinte forma: $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, funções lineares em $\mathbf{x}$. A forma matricial equivalente é mostrada na Equação. 6. Resolver um problema em LMI significa determinar se o problema é viável ou não, e, sendo viável, calcular o ponto de viabilidade com um valor objetivo mínimo global dentro de uma tolerância pré-especificada. Os problemas padrões de LMI são tratáveis tanto do ponto de vista teórico, como pelo lado prático. Eles podem ser resolvidos em tempo polinomial, o que significa que eles possuem baixa complexidade computacional e podem ser resolvidos na prática de forma bastante eficiente, atingindo o ótimo global com critérios de parada não heurísticos (Boyd et al., 1994).

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ &\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ &\mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})^T\mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \qquad (6)$$

## 4 DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS DE CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO

As idéias a serem desenvolvidas nessa seção podem ser resumidas conforme a seguir:

- RMPC-MMR (*Robust Model Predictive Control with Min-Max optimization, time invariant uncertainty and constrained stability*): MPC baseado em otimização mín-máx considerando incerteza na entrada (matriz **B**) invariante no tempo com a adição da restrição de robustez cujas idéias seguem Badgwell (1997) de forma a tornar o algoritmo robusto;
- LMI-RMPCR (*Robust Model Predictive Control with stability constrained type Lyaponov and uncertainty as polytope in LMI form*): MPC robusto utilizando LMI baseado na formulação apresentada por Löfberg (2003), que usa incertezas na forma de perturbação externa aditiva. A incerteza adotada foi a forma de multimodelos.

### 4.1 Restrição de Robustez

Existem muitas estratégias para tornar um algoritmo MPC robusto. De forma a pesquisar algoritmos de controle robustamente estável, as ideias apresentadas por Bagdwell (1997) irão forçar a robustez na forma de uma restrição. Forçar a robustez por uma restrição se assemelha a requerer que a função custo (J) seja menor ou igual à função custo de malha aberta (isto é, o custo obtido implementando a restrição de

trajetórias ótimas previamente computadas) para todos os valores de parâmetros. Esse requerimento pode ser expresso pela Equação 7. $\boldsymbol{\Xi}_k^*$ é uma versão deslocada do valor ótimo de $\boldsymbol{\Xi}_{k-1}$ para o problema de otimização mín-máx, em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de incertezas pertencente ao subespaço das incertezas $\boldsymbol{\Theta}$. A vantagem de tal formulação reside no fato de que a restrição de contração se baseia diretamente no índice de desempenho e, por consequência, é mais intuitivo que a maior parte das restrições de contração. Os resultados de estabilidade robusta para os controladores nos quais a restrição for adicionada é confiado inteiramente às restrições de contração.

$$J_k(\boldsymbol{\Xi}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \le J_k(\boldsymbol{\Xi}_k^*, \boldsymbol{\theta}_k), \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \boldsymbol{\Theta} \qquad (7)$$

O MPC robustamente estável é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\boldsymbol{\Xi}$:$\{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k},..., \mathbf{u}_{k+Nm-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Equações. 8-9.

$$J_k = \min_{\boldsymbol{\Xi}} \max_{\boldsymbol{\Theta}} \sum_0^{\infty} \Psi(\mathbf{x}_{k+i}, \mathbf{u}_{k+i}, \Delta\mathbf{u}_{k+i}) \qquad (8)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_{k+i|k} \in \mathbf{U}, \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \boldsymbol{\Theta} \\ &\mathbf{x}_{k+i|k} \in \mathbf{X}, \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \boldsymbol{\Theta} \\ &J_k(\boldsymbol{\Xi}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \le J_k(\boldsymbol{\Xi}_k^*, \boldsymbol{\theta}_k), \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \boldsymbol{\Theta} \end{aligned} \qquad (9)$$

Será apresentado aqui apenas um esboço da prova, que pode ser feita de forma semelhante às provas apresentadas por Lee e Cooley (2000). Inicialmente é definido o conceito de deslocamento da ação de controle, dado pelo operador de deslocamento $(\boldsymbol{\eta})$ é dado pela Eq. 10 (Bagdwell, 1997). Note que a restrição de contração introduzida é viável e a inequação sempre se mantém,

$$J_k(\boldsymbol{\Xi}_{k+1}^*) \le J_k(\overline{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1}^*) = J_k(\boldsymbol{\Xi}_k^*) - \Psi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_{k+1}).$$

Dadas as considerações necessárias para a função custo, então $J_k(\boldsymbol{\Xi}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \ge \mathbf{0}$ é uma sequência convergente e os estados e entradas irão se anular para $k \to \infty$, o que faz o projeto robustamente estável.

$$\overline{\boldsymbol{\Xi}}_k^* = \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Xi}_{k-1}^*, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & M & \mathbf{0} \\ M & O & O & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda & \Lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

## 4.2 RMPC-MMR

O Algoritmo adotado por Lee e Cooley (2000) representativo do controle robusto na forma mín-máx é introduzido seguir. O MPC mín-máx é definido de forma que o movimento de controle implementado $\mathbf{u}(k)$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{(k|k)}$ de $\boldsymbol{\Xi}$:$\{\mathbf{u}_{(k|k)}$, $\mathbf{u}_{(k+1|k)}, \ldots, \mathbf{u}_{(k+Nm-1|k)}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 11-12.

$$\min_{u_k,...,u_{k-N_m-1}} \max_{\theta_k,...,\theta_{k-N_m-1}} \left[ J_k \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{x}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+i} + \sum_{q=0}^{N_m-1} \mathbf{u}^T{}_{k+q} \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+q} \right] \qquad (11)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{A}^i \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{A}^{i-q} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+q-1}) \mathbf{u}_{k+q-1}, i = 1,...,\infty \qquad (12)$$

Onde a matriz de entrada sujeita a incerteza variante no tempo é apresentada na Eq. 13:

$$\overline{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) & O & M \\ M & O & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) & \Lambda & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+N_m}) \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Para se ter o algoritmo de controle robustamente estável é necessário formular o projeto do controlador usando a descrição de incerteza variante no tempo. Os maiores problemas para essa abordagem residem

nos seguintes fatos: (a) o grande esforço computacional; (b) a natureza não convexa do problema (Lee e Cooley, 2000). Para a minimização dessas dificuldades, estes autores propuseram uma formulação convexa usando a estrutura mín-máx (RMPC-MM). Entretanto, o controlador obtido ainda demanda um grande esforço computacional e a formulação de incerteza invariante no tempo não é robustamente estável. Desta forma este trabalho propõe implementar as ideias de Lee e Cooley (2000) na forma de um RMPC-MM com restrição de robustez na forma indicada por Badgwell (1997).

Para este estudo de RMPC a escolha do problema de otimização mín-máx com incerteza nas entradas foi feita levando-se em consideração que em sistemas reais este tipo de problema é relativamente comum, pela facilidade de simulação e pela natureza das manipulações mecânicas do sistema.

O MPC mín-máx é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\boldsymbol{\Xi}$:$\{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k},..., \mathbf{u}_{k+Nm-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Equações. 14-32 (Silva et al., 2004; Silva et al., 2005). O horizonte de controle e de predição é infinito e a formulação descrita é adequada para sistemas estáveis.

$$\min_{\boldsymbol{\Xi}\in\boldsymbol{\Xi}^m}\max_{\boldsymbol{\Theta}\in\Theta^m}\left[J_k(\boldsymbol{\Xi}_k,\boldsymbol{\theta}_k)\overset{\Delta}{=}\mathbf{X}_{k+1}{}^T\boldsymbol{\mu}\mathbf{X}_{k+1}+\boldsymbol{\Xi}_k{}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Xi}_k\right] \quad (14)$$

Sujeito a:

$$\boldsymbol{\theta}\le\mathbf{I}|\theta| \quad (15)$$

$$J_k(\boldsymbol{\Xi}_k,\boldsymbol{\theta}_k)\le J_k(\overline{\boldsymbol{\Xi}}_k^*,\boldsymbol{\theta}_k),\forall\boldsymbol{\theta}_k\in\boldsymbol{\Theta} \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_{k+i}\in\mathbf{U},\ i=0,...,Nm\text{-}1 \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_{k+N_m+i}=0,\ \text{quando}\ i\ge 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{X}_{k+1}=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k+\overline{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\Xi}_k \quad (19)$$

Com:

$$\overline{\boldsymbol{\Xi}}_k^*=\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Xi}_{k-1}^*,\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}&\Lambda&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&M&\mathbf{0}\\M&O&O&\mathbf{0}&\mathbf{I}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\Lambda&\Lambda&\mathbf{0}\end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{X}_{k+1}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1}&\Lambda&\mathbf{x}_{k+N_m-1}\end{bmatrix}^T \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_k&\Lambda&\mathbf{u}_{k+Nm-1}\end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_k&\Lambda&\boldsymbol{\theta}_{k+Nm-1}\end{bmatrix}^T \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k=\begin{bmatrix}\delta_1&\Lambda&\delta_{\dim(\mathbf{u})}\end{bmatrix}^T \quad (24)$$

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\M\\\mathbf{A}^{N_m}\end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\overline{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Theta}_k)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)&\mathbf{0}&\Lambda&\mathbf{0}\\\mathbf{AB}(\boldsymbol{\theta}_k)&\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)&O&M\\M&O&O&\mathbf{0}\\\mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)&\mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)&\Lambda&\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)\end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)=\mathbf{B}\begin{bmatrix}1+\delta^1&0&\Lambda&0\\0&1+\delta^2&M&M\\M&\Lambda&O&M\\0&\Lambda&\Lambda&1+\delta^{\dim(\mathbf{u})}\end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{diag}\left[\underbrace{\mathbf{Q}\ldots\mathbf{Q}}_{N_m-1}\ \ \overline{\mathbf{Q}}\right] \qquad (28)$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{A} \qquad (29)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\left[\underbrace{\mathbf{R}\ldots\mathbf{R}}_{N_m}\right] \qquad (30)$$

$$\mathbf{U}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{N_m} \qquad (31)$$

$$\mathbf{X}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{N_m} \qquad (32)$$

**Teorema 1:** Quando as ações de controle do problema de otimização mín-máx (14), sujeito às restrições (15-19) e às definições (20-32) são aplicadas ao sistema de controle na forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$ resultará em laço fechado robustamente estável, em que: $\mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{0}$ quando $k \rightarrow \infty$ para toda a condição inicial $\mathbf{z}_0$ e para todos os possíveis parâmetros da sequência $\{\mathbf{u}_k \in \mathbf{U},\ k \geq 0\}$.

**Prova:** A estabilidade robusta pode ser provada considerando o custo de uma planta real. O valor da máxima incerteza é determinado pelo problema de maximização e encontra-se obviamente limitado a uma faixa e sendo assim o problema de minimização encontrará a ação de controle para o pior caso, na forma de: $V_{k+1}\left(\boldsymbol{\Xi}^*_{k+1}, \boldsymbol{\Theta}\right) \leq V_{k+1}\left(\overline{\boldsymbol{\Xi}}^*_{k+1}, \boldsymbol{\Theta}\right) = V_k\left(\boldsymbol{\Xi}^*_k, \boldsymbol{\Theta}\right) - \mathbf{z}^T_{k+1}\mathbf{Q}\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{u}^T_{k+1}\mathbf{R}\mathbf{u}_{k+1}$.

Como $V_k\left(\boldsymbol{\Xi}^*_k, \boldsymbol{\Theta}\right) \geq 0$ é uma sequência convergente e $\mathbf{z}_k \rightarrow 0$, $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{0}$.

### 4.3 LMI-RMPC

Considerando o sistema na forma linear, discreto e invariante no tempo, dado pela Eq. 33. Os vetores **x**, **u** e **y** são: o vetor de estados, o vetor de entradas e o vetor de saídas respectivamente, pertencentes ao conjunto de números reais de ordem apropriada. Além da dinâmica, o sistema possui restrições de estado e de entrada na forma das Eq. 34-35. A incerteza, nesse caso, é considerada na forma politópica, como mostra a Eq. 36. O horizonte de controle é igual ao horizonte de predição para a formulação descrita.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{aligned} \qquad (33)$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U},\ \mathbf{U} = \{\mathbf{u}: \mathbf{E}_{uu} \leq \mathbf{f}_u\},\ \text{com}\ \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \qquad (34)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X},\ \mathbf{X} = \{\mathrm{x}: \mathbf{E}_{xx} \leq \mathbf{f}_x\},\ \text{com}\ \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A}\quad \mathbf{B}] \in \Pi \\ &\Pi = \mathrm{co}\{[\mathbf{A}_1\quad \mathbf{B}_1]\ \Lambda\ [\mathbf{A}_M\quad \mathbf{B}_M]\} \end{aligned} \qquad (36)$$

A dedução neste caso considera que os horizontes de controle e de predição são iguais. As matrizes $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$ são matrizes de ponderação positivas definidas. O problema de otimização na forma de LMI é mostrado nas Equações 37-39.

$$\min_{\chi, \mathbf{U}_{lmi}} \ \chi \qquad (37)$$

Sujeito a:

$$\begin{pmatrix} \chi & (\mathbf{C}_{lmi}(\mathbf{A}_{i,lmi}\mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,lmi}\mathbf{U}_{lmi}))^T & \mathbf{U}_{lmi}{}^T \\ (\mathbf{C}_{lmi}(\mathbf{A}_{i,lmi}\mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,lmi}\mathbf{U}_{lmi})) & \mathbf{Q}_{lmi}{}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{lmi} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{lmi}{}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{u}_{lmi}} \\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}lmi}\mathbf{B}_{i,lmi} \end{pmatrix}\mathbf{U}_{lmi} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{lmi}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{lmi}} - \mathbf{E}_{\mathbf{x}lmi}\mathbf{A}_{i,lmi}\mathbf{x}_{k|k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{A}_i\mathbf{z}_{k|k}+\mathbf{B}_i\mathbf{u}_{k|k})^T \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{z}_{k|k}+\mathbf{B}_i\mathbf{u}_{k|k}) & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (39)$$

Em que os vetores e matrizes necessários para a resolução deste problema de otimização são dados pelas Equações 40-46.

$$\mathbf{A}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ M \\ \mathbf{A}^{N_m-1} \end{pmatrix} \qquad (40)$$

$$\mathbf{B}_{lmi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ M & O & O & O & M \\ \mathbf{A}^{N_m-2}\mathbf{B} & \Lambda & \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (41)$$

$$\mathbf{C}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \qquad (42)$$

$$\mathbf{R}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \qquad (43)$$

$$\mathbf{Q}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \qquad (44)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_\mathbf{u} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\mathbf{u}^T & \mathbf{f}_\mathbf{u}^T & \Lambda & \mathbf{f}_\mathbf{u}^T \end{pmatrix}^T \qquad (45)$$

$$\mathbf{E}_{x_{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_x \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{x_{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^T & \mathbf{f}_x^T & \Lambda & \mathbf{f}_x^T \end{pmatrix}^T \qquad (46)$$

Torna-se importante ressaltar que, para este caso, a restrição de estado é robustamente satisfeita se $\mathbf{E}_\mathbf{x}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k}+\mathbf{B}\mathbf{U}) \leq \mathbf{F}_x$ for satisfeito. A Equação 39 expressa a LMI referente à restrição de estabilidade que, adicionada ao problema, garante a estabilidade robusta. Resultados da aplicação dessa técnica podem ser vistos em Silva et al. (2007). Outro aspecto a ser ressaltado é que a incerteza está contida na forma de um politopo. Quando a função objetivo é convexa e o modelo de incertezas gera um conjunto fechado de predições o atendimento dos requisitos dos vértices do politopo assegura que todos os modelos internos da região serão atendidos, conforme indica o Teorema 2 (Löfberg, 2003).

**Teorema 2:** Seja C um conjunto fechado e seja f: C → R uma função complexa. Então se f atinge o máximo sobre C, ele chega ao máximo em algum ponto extremo de C (Löfberg, 2003).

**Teorema 3:** Quando as ações de controle do problema de otimização (37), sujeito às restrições (38-39) e às definições (40-46) são aplicadas ao sistema de controle na forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$ resultará em laço fechado robustamente estável.

Para a prova será feito o uso da definição a seguir (Löfberg, 2003). A função objetivo, dada pela Eq. 47, do problema sem restrição apresentado nesta possui solução analítica, conforme apresenta a Eq. 48. Neste

caso, existe uma forma $\mathbf{U}_{lmi} = \mathbf{K}\mathbf{x}_{k|k}$, conforme indica as Eq. 49-50. Mesmo que o cálculo do controlador não seja feito buscando **K**, é possível que a variável manipulada seja colocada nesta forma.

$$\min_{U} \mathbf{Y}_{lmi}{}^{T}\mathbf{Q}_{lmi}\mathbf{Y}_{lmi} + \mathbf{U}_{lmi}{}^{T}\mathbf{R}_{lmi}\mathbf{U}_{lmi} \qquad (47)$$

$$\mathbf{U}_{lmi} = -\left(\mathbf{A}_{lmi}^{T}\mathbf{C}_{lmi}^{T}\mathbf{Q}_{lmi}\mathbf{C}_{lmi}\mathbf{A}_{lmi} + \mathbf{R}_{lmi}\right)^{-1}\mathbf{B}_{lmi}^{T}\mathbf{Q}_{lmi}\mathbf{C}_{lmi}\mathbf{A}_{lmi}\mathbf{x}_{k|k} \qquad (48)$$

$\mathbf{U}_{lmi} = \mathbf{K}\mathbf{x}_{k|k}$, onde **K** é dado a seguir: (49)

$$\mathbf{K} = -\left(\mathbf{A}_{lmi}^{T}\mathbf{C}_{lmi}^{T}\mathbf{Q}_{lmi}\mathbf{C}_{lmi}\mathbf{A}_{lmi} + \mathbf{R}_{lmi}\right)^{-1}\mathbf{B}_{lmi}^{T}\mathbf{Q}_{lmi}\mathbf{C}_{lmi}\mathbf{A}_{lmi} \qquad (50)$$

**Prova:** por indução, considerando-se que o problema é viável para $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$. Como o problema foi viável para $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$, conhece-se $\mathbf{x}_{k|k} \in \mathbf{X}$. A viabilidade da solução no instante k é V = 0. $\mathbf{x}_{k+j+1|k} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_{k+j|k}$. Para a consideração de que K e P estão contidos em $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x} \le 1\}\mathbf{P} > \mathbf{0}$, garantindo a viabilidade das restrições de estado e de controle. A nova restrição $\mathbf{x}_{k+1} \in \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{T}\mathbf{P}\mathbf{x} \le 1\}\mathbf{P} > \mathbf{0}$, se mantém para $\mathbf{u}_{k|k} = \mathbf{K}\mathbf{x}_{k|k}$ por construção. Conseqüentemente o problema é viável no instante k.

## 5 O SISTEMA EXPERIMENTAL

O sistema experimental construído é um processo de neutralização que ocorre em um reator tanque agitado. As vazões de ácido ($q_1$) e de base ($q_2$) são as variáveis manipuladas (**u**), a vazão de solução tampão ($q_3$) é a perturbação não medida ou medida (**d**), a depender de como a mesma é tratada na formulação. Para o caso desse estudo, a vazão de solução tampão foi utilizada apenas para fins de simulação. A altura do nível no reator (h) e o pH da vazão de saída ($q_4$) são as variáveis controladas ou saídas (**y**). O modelo físico do processo, apresentado na (Figura 2) foi desenvolvido por Hall (1987) e é baseado nas hipóteses de mistura perfeita, densidade constante e solubilidade completa dos íons envolvidos. As reações químicas envolvidas no processo de neutralização ácido-base são entre $HNO_3$, NaOH. De forma a se ter um modelo completo será considerada a presença de solução tampão ($NaHCO_3$). Contudo para os resultados experimentais não foi utilizada essa solução. As quantidades $W_a$ e $W_b$ são definidas para o equacionamento deste problema e são chamadas de invariantes porque suas concentrações não são afetadas ao longo da reação. As reações são rápidas o bastante para permitir que o sistema seja considerado em equilíbrio. Logo, as reações de equilíbrio podem ser usadas para determinar a concentração de íons de hidrogênio(H) através da concentração dos invariantes reacionais. O sistema na forma em espaço de estados resultante é mostrado nas Equações 51-58. Os termos dWadz e dWbdz são definidos nas Equações 59-60. A Equação 61 mostra a relação de dydz.

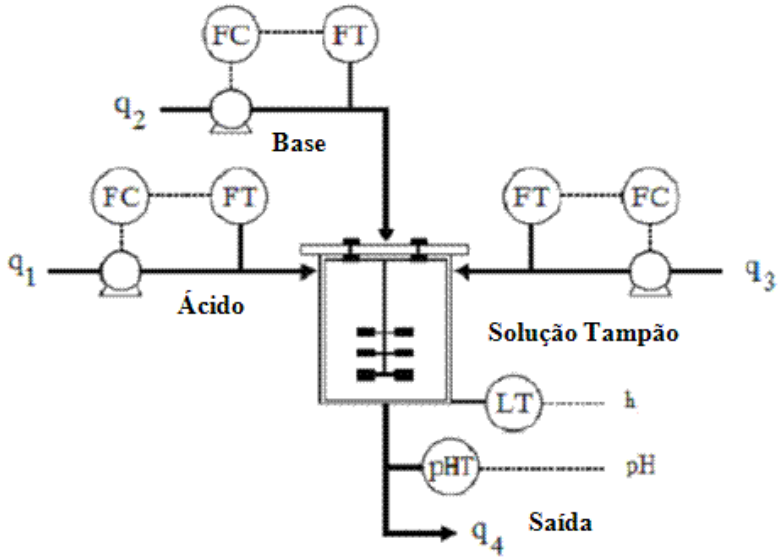



Figura 2. Esquemático da unidade experimental.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h & W_a & W_b \end{bmatrix} \qquad (51)$$

$$\mathbf{u} = [q_1 \quad q_2] \qquad (52)$$

$$\mathbf{y} = [h \quad pH] \qquad (53)$$

$$\mathbf{d} = [q_3] \qquad (54)$$

Ar é a área do reator em $cm^2$, Vr é o volume reacional em $cm^3$, h é a altura da solução no reator dado em cm,. $W_a$ e $W_b$ possuem componentes em cada corrente ($W_{ai}$ e $W_{bi}$), kw é a constante de dissociação da água, ka1 e ka2 são as constantes de reação e H é a concentração de íons de hidrogênio. As condições nominais de operação encontram-se na Tabela 1.

**Tabela 1 – Parâmetros nominais do sistema.**

| Variáveis | Símbolo | Valores nominais |
|---|---|---|
| Altura | H | 25 cm |
| Área | Ar | 168,38 $cm^2$ |
| Volume | Vr | 4209,67 $cm^3$ |
| Vazão de ácido | $q_1$ | 11,9130 mL/s |
| Vazão de base | $q_2$ | 11,8235 mL/s |
| Vazão de Solução Tampão | $q_3$ | 0,01 mL/s |
| pH | pH | 7,0 |
| Conc. ácido em $q_1$ | $[HNO_3]$ | $3{,}510.10^{-03}$ M |
| Conc. base em $q_2$ | [NaOH] | $3{,}510.10^{-03}$ M |

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c_v.p7.h^{p7-1} & 0 & 0 \\ -\dfrac{q_1(W_{a1}-W_a)+q_2(W_{a2}-W_a)+q_3(W_{a3}-W_a)}{Arh^2} & \dfrac{-q_1-q_2-q_3}{Arh} & 0 \\ -\dfrac{q_1(W_{b1}-W_b)+q_2(W_{b2}-W_b)+q_3(W_{b3}-W_b)}{Arh^2} & 0 & \dfrac{-q_1-q_2-q_3}{Arh} \end{bmatrix} \qquad (55)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Ar} & \dfrac{1}{Ar} \\ \dfrac{(W_{a1}-W_a)}{Ar.h} & \dfrac{(W_{a2}-W_a)}{Ar.h} \\ \dfrac{(W_{b1}-W_b)}{Ar.h} & \dfrac{(W_{b2}-W_b)}{Ar.h} \end{bmatrix} \qquad (56)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{Ar} \\ \dfrac{(W_{a3}-W_a)}{Ar.h} \\ \dfrac{(W_{b3}-W_b)}{Ar.h} \end{bmatrix} \qquad (57)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & dydz/dWadz & dydz/dWbdz \end{bmatrix} \qquad (58)$$

$$dWadz = 1 + \frac{kw}{H^2} - \frac{W_b\left(-\dfrac{ka1}{H^2} - \dfrac{4ka1.ka2}{H^3}\right)}{1 + \dfrac{ka1}{H} + \dfrac{ka1.ka2}{H^2}} + \frac{W_b\left(\dfrac{ka1}{H} + \dfrac{2.ka1.ka2}{H^2}\right)\left(-\dfrac{ka1}{H^2} + \dfrac{2.ka1.ka2}{H^3}\right)}{\left(1 + \dfrac{ka1}{H} + \dfrac{ka1.ka2}{H^2}\right)^2} \qquad (59)$$

$$dWbdz = \frac{\left(1+\dfrac{kw}{H^2}\right)\left(1+\dfrac{ka1}{H}+\dfrac{ka1.ka2}{H^2}\right)}{\dfrac{ka1}{H}+\dfrac{2.ka1.ka2}{H^2}} - \frac{\left(H-\dfrac{kw}{H}-W_a\right)\left(1+\dfrac{ka1}{H}+\dfrac{ka1.ka2}{H^2}\right)\left(\dfrac{-ka1}{H^2}-\dfrac{4.ka1.ka2}{H^3}\right)}{\left(\dfrac{ka1}{H}+\dfrac{2.ka1.ka2}{H^2}\right)^2} + \frac{\left(H-\dfrac{kw}{H}-W_a\right)\left(\dfrac{-ka1}{H^2}-\dfrac{2.ka1.ka2}{H^3}\right)}{\dfrac{ka1}{H}+\dfrac{2.ka1.ka2}{H^2}}$$

(60)

$$dydz = -\log_{10}\frac{e}{H} \qquad (61)$$

A vazão de saída é dada pela Equação 62, onde os parâmetros $c_v$ e $p^7$ foram obtidos por estimação através de dados experimentais em uma corrida em malha aberta. Para maiores detalhes ver Silva (2009). A Figura 3 mostra os resultados de simulação e experimentais em malha aberta. Observa-se que o modelo mostra-se adequado para a aplicação em controle preditivo.

$$q_4 = c_v h^{p7} \qquad (62)$$

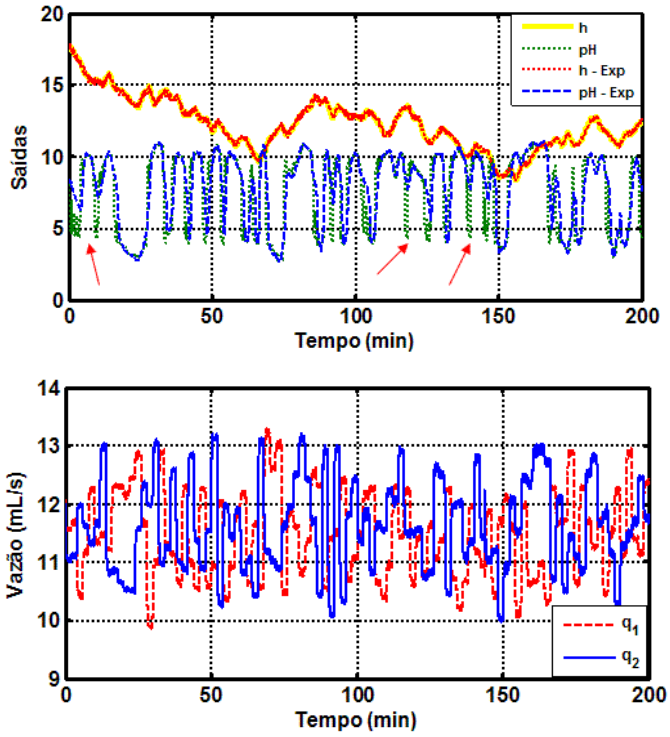



Figura 3. Resposta em malha aberta do sistema de neutralização: validação do modelo.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esse tópico trata da operação em malha fechada do reator de neutralização. O nível do reator e o pH são as variáveis controladas ou saídas do sistema. As vazões de ácido e de base são as variáveis manipuladas ou entradas. A vazão de solução tampão foi modelada como uma perturbação, que pode ser tratada como perturbação medida ou não medida, a depender de como ela é utilizada no sistema/controlador e nos modelos de simulação. Para a operação em malha fechada experimental não foi utilizada a adição de solução tampão. Para a operação em tempo real foram desenvolvidas VI em Labview® para cada controlador. Esse programa realiza a aquisição de dados, a interface gráfica do sistema e a interface matemático-computacional. Os controladores foram implementados em linguagem Matlab®. Utilizou-se o controle cascata, em que a saída do controlador MPC ou RMPC é o valor de *setpoint* para um controle PID. A adoção deste tipo de controle se deu como uma forma de corrigir a vazão devido ao efeito que a variação do nível no tanque de armazenamento exerce sobre a saída da bomba. A estrutura de controle é mostrada na Figura 4.

O controlador IHMPC (Muske e Rawlings, 1993) foi implementado na operação em tempo real na planta experimental. Os controladores RMPC-MMR e LMI-RMPCR tiveram os resultados de simulação comparados com os resultados de simulação e experimentais do controlador IHMPC. Para a implementação experimental utilizou-se a versão LTV (*Linear Time Variant*) uma vez que foi aplicada a linearização sucessiva no ponto de operação. Em função da linearização foi necessário também modificação do sistema, que agora passa a ter a forma dada pela Equação 63. O termo $\mathbf{f}_{k-1}$ necessita ser considerado na formulação do cálculo do controlador. Este termo surge devido a linearização ser feita no ponto corrente e não no estado estacionário (que pode nem ser conhecido exatamente). Como o sistema é muito sensível, o comportamento do modelo é muito dependente do ponto de linearização levando o sistema a se tornar instável em torno da região de pH igual a 7. Existem diversos caminhos para executar essa modificação. Nesse trabalho foi adotada a expansão dos estados, dada pela Equação 64 a fim de se

utilizar a forma padrão do RMPC.

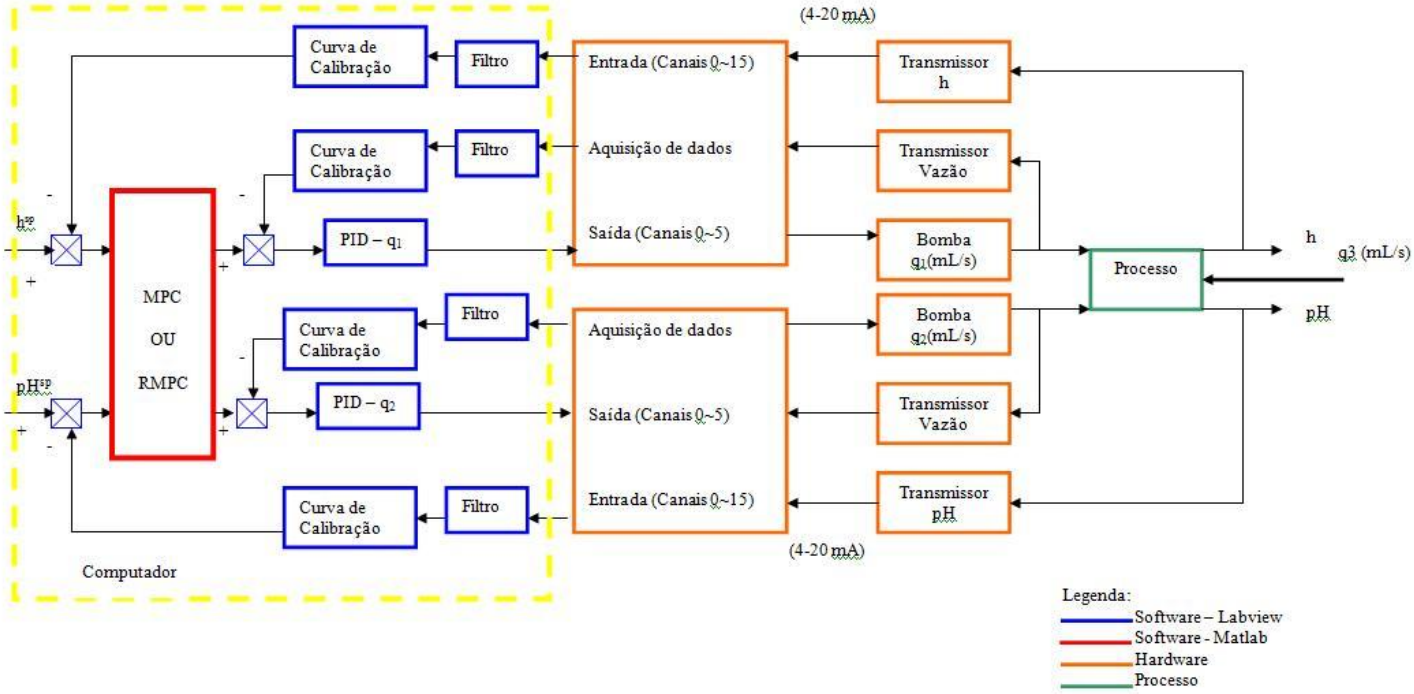



Figura 4. Estrutura do sistema de controle experimental em malha fechada.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{f}_{k-1} \qquad (63)$$
$$\hat{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{O}_{k-1}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' \qquad (64)$$

A sintonia dos controladores adotou o roteiro apresentado por Henson e Seborg (1997). Para a parte experimental do IHMPC foi ainda realizado um ajuste fino de campo durante a corrida inicial em malha fechada com cada controlador de forma que o sistema apresentasse melhor desempenho experimental na malha fechada. A Tabela 2 mostra os parâmetros de cada controlador resultante da simulação.

Foram realizadas variações de setpoint para se avaliar a capacidade dos controladores em lidar com transições. Partindo-se do sistema com pH igual a 7 e altura do reator em 18 cm, foram realizadas variações na forma do vetor dado pela Equação 65, sendo que cada degrau teve a duração de 2.000s.

**Tabela 2: Parâmetros de ajuste dos controladores.**

| Controlador | Parâmetro |
|---|---|
| IHMPC<br>RMPC-MMR | Nm=10 |
| | R=10I |
| | S=10I |
| | $\Delta u_{max}$=0,25 mL/s |
| LMI-RMPCR | $N_m$=10 |
| | R=10I |
| | S=10I |
| | δ=0,01 |
| | $\Delta u_{max}$=0,25 mL/s |
| Todos os controladores | Δt=10s |
| | $u_{max}$=38 mL/s |
| | $u_{min}$=4 mL/s |

$$\begin{bmatrix} h \\ pH \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 21 & 18 & 15 & 18 \\ 7 & 10 & 7 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Para todas as simulações de controladores foi adicionado um ruído aleatório de média zero na ordem de 10% nas saídas (h e pH).

No sistema experimental definiu-se como estados: h, Wa e Wb. Para esse caso, os dois últimos estados são abstratos, como foi apresentado na seção de modelagem do sistema, sendo então necessário estimá-los. Para tal foi utilizado o filtro de Kalman (KAILATH, 1980), como apresenta a Eq. 66:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k\left(\mathbf{y}_{med_k} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right) \quad (66)$$

Para esse caso a matriz de transmissão direta é igual a zero e $\mathbf{L}_k$ é a matriz de ganho de Kalman, encontrada pela solução da Equação Discreta de Riccati. Os estados são estimados a partir das saídas medidas e das entradas enviadas para a planta.

Foi também inserido a informação do erro (**e**) entra a planta e o modelo, apresentado na Eq. 67 de forma a se minimizar a interferência da estimação de estados no comportamento do sistema (Maciejowski, 2002).

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_{Plant} - \mathbf{y}_{Mod} \quad (67)$$

As Figuras 5-8 apresentam os resultados para a simulação considerando-se o controle clássico IHMPC.

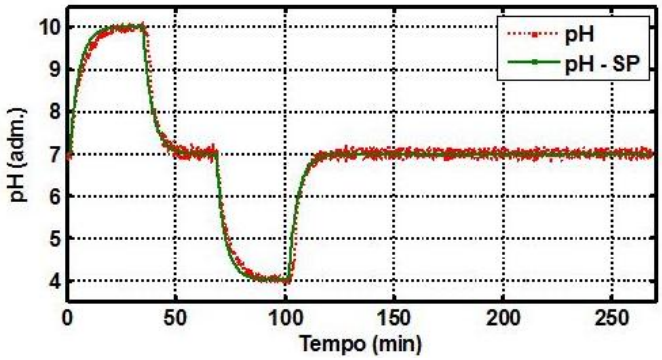



Figura 5. Comportamento do pH simulado e *setpoint* (SP) - IHMPC

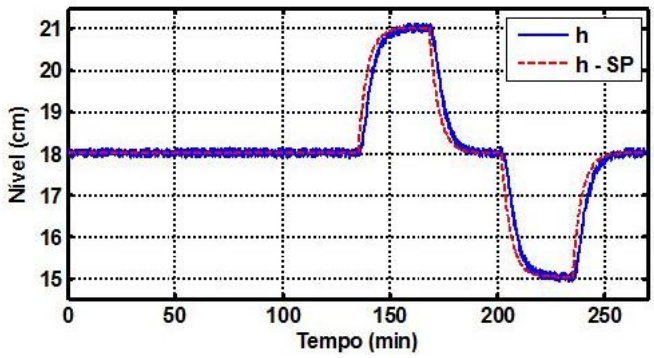



Figura 6. Comportamento do nível simulado e *setpoint* (SP) - IHMPC.

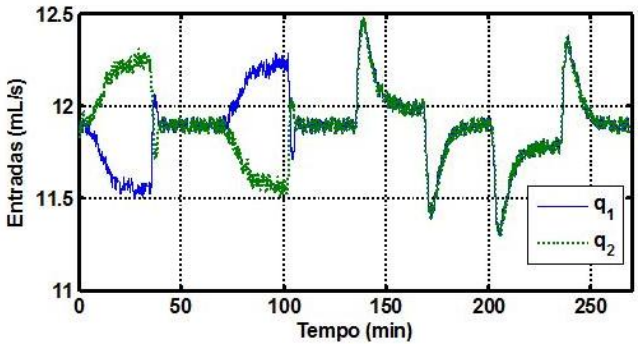



Figura 7. Vazão de ácido ($q_1$) e base ($q_2$) – caso simulado - IHMPC.

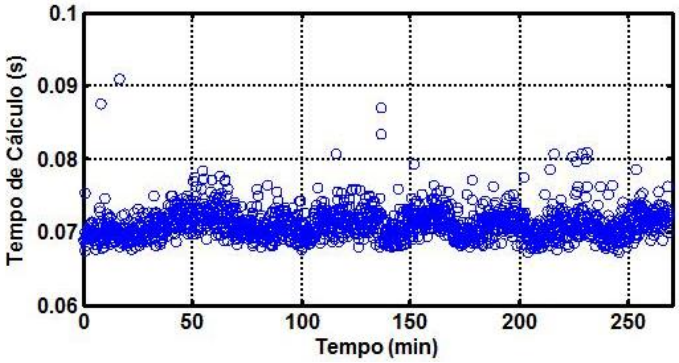



Figura 8. Tempo de cálculo do controlador IHMPC.

As Figuras 9-11 mostram os resultados experimentais para transição no nível. O nível aparentemente apresenta um *offset*, contudo esse valor encontra-se dentro da incerteza da medida. Ao final da corrida foi necessário ajustar a sintonia do controlador, conforme indicado na Figura 9.

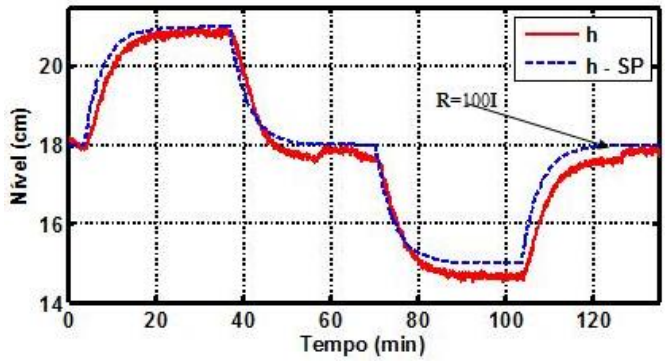



Figura 9. Comportamento experimental do nível em relação ao valor de *setpoint* (SP).

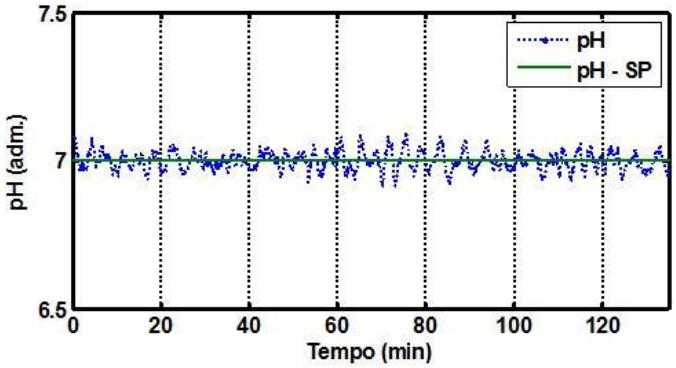



Figura 10. Comportamento experimental do pH em relação ao valor de *setpoint* (SP).

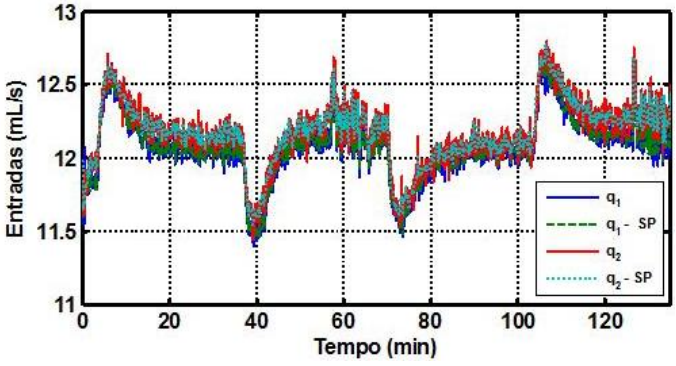



Figura 11. Variável manipulada implementada em relação aos valores calculados pelo IHMPC (SP).

As Figuras 12-14 apresentam a corrida experimental para a transição do pH utilizando o controlador IHMPC. O nível foi mantido dentro do valor da incerteza da medida. A corrida foi considerada satisfatória.

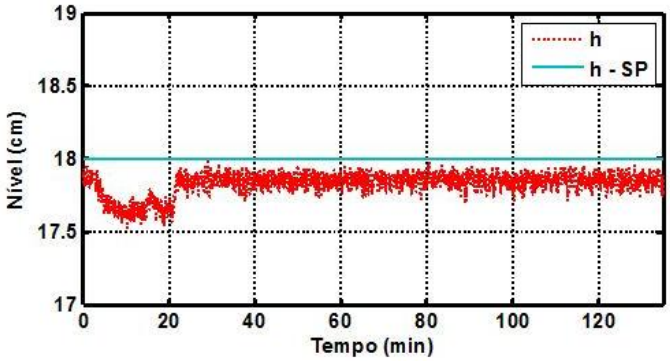



Figura 12. Comportamento experimental do nível em relação ao valor de *setpoint* (SP).

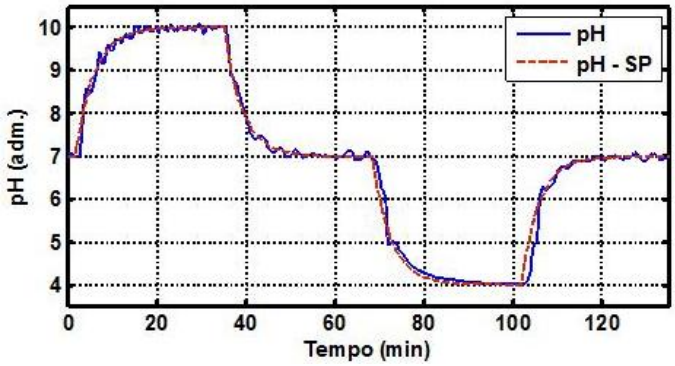



Figura 13. Comportamento experimental do pH em relação ao valor de *setpoint* (SP).

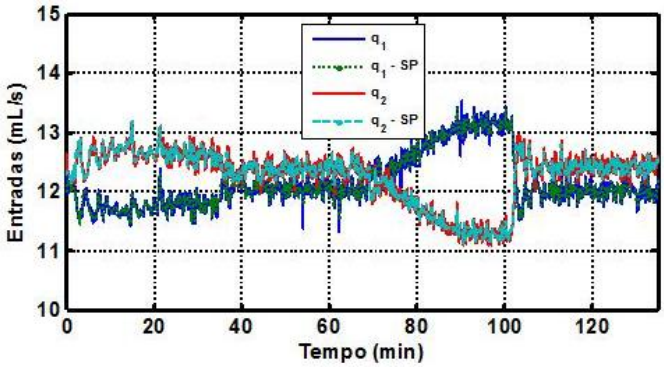



Figura 14. Variável manipulada implementada em relação aos valores calculados pelo IHMPC (SP).

As Figuras 15-19 apresentam a simulação do sistema com o controlador RMPC-MMR. A simulação indica uma ligeira perda de desempenho do controlador, mas ainda sim a resposta apresenta-se satisfatória. Conforme esperado, existe um maior esforço computacional, considerando-se o problema de otimização mín-máx. O tempo de cálculo é maior, mas dentro de valores que permitiriam a implementação do controle no tempo de amostragem, que é de 10 segundos.

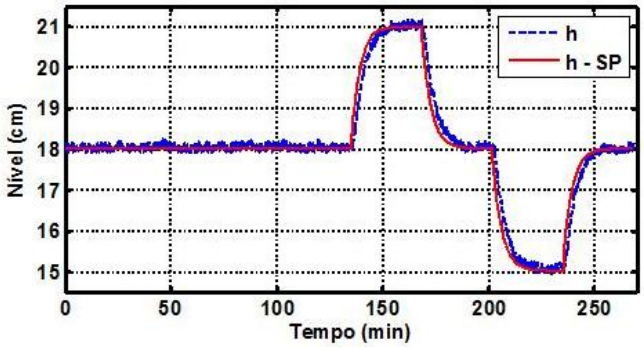



Figura 15. Comportamento do nível simulado e *setpoint* (SP) – RMPC-MMR.

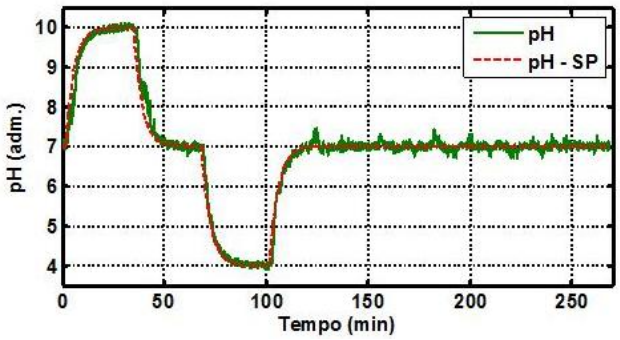



Figura 16. Comportamento do pH simulado e *setpoint* (SP) – RMPC-MMR.

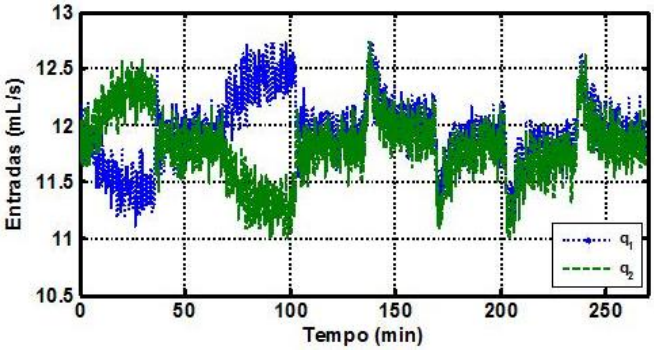



Figura 17. Variável manipulada calculada por RMPC-MMR.

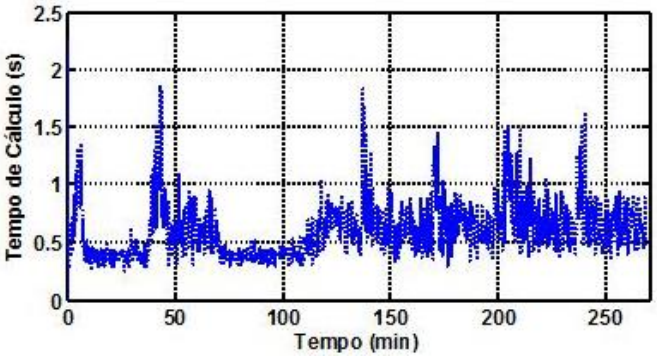



Figura 18. Tempo de calculo do controlador RMPC-MMR.

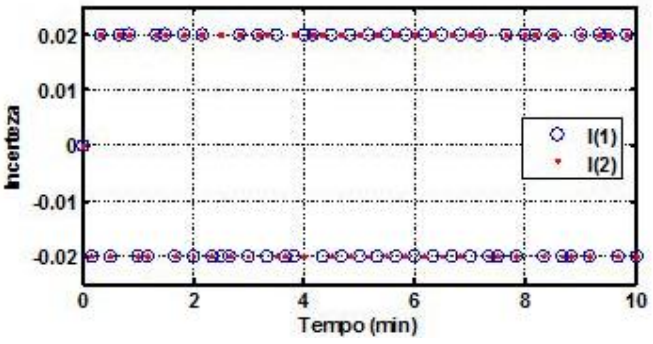



Figura 19. Resultado da máxima incerteza - RMPC-MMR.

Nas Figuras 20-22 encontra-se a simulação do controlador LMI-RMPCR para o caso nominal.

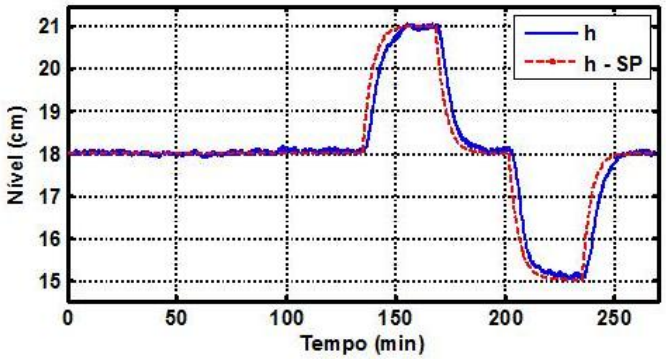



Figura 20. Comportamento do nível simulado e *setpoint* (SP) – LMI-RMPCR – caso nominal.

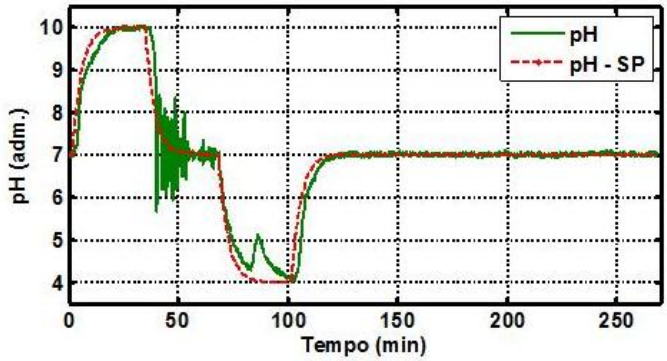



Figura 21. Comportamento do pH simulado e *setpoint* (SP) – LMI-RMPCR – caso nominal.

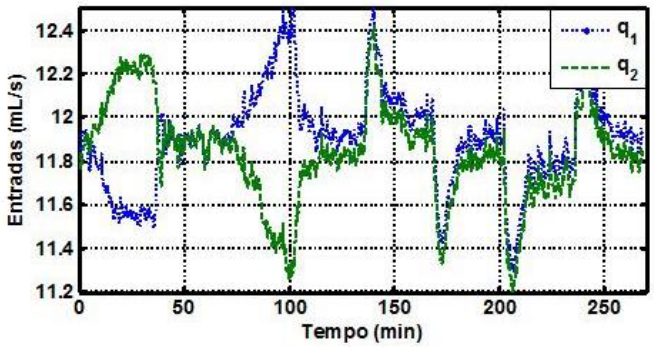



Figura 22. Variável manipulada em relação aos valores calculados pelo LMI-RMPCR (SP) – caso nominal.

As Figuras 23-25 mostram os resultados de simulação para o controlador LMI-RMPCR considerando uma incerteza na forma de um politopo formado na matriz B em 2%, para que os resultados sejam comparativos com o RMPC-MMR. Para o cálculo desse controlador fez-se o uso do *toolbox* para LMI (Yalmip, Löfberg, 2004) e do LMITools®. O uso das rotinas do *toolbox* YALMIP torna a programação bastante intuitiva e direta, mas em contrapartida acarreta um gasto de tempo para estruturar o sistema na forma solucionável pelo LMITools®.

Do ponto de vista de simulação a resposta é satisfatória. O controlador atende aos requisitos de desempenho e estabilidade conforme pode ser observado nas Figuras 20-22. Por outro lado, para o atendimento dos requisitos de operação em tempo real, se faz necessário um estudo para otimização de códigos de forma a reduzir o tempo de processamento computacional. Para o caso de politopo, a incerteza de 2% na região de transição para pH igual a 7 leva a degradação das respostas do sistema, conforme já indicava a Figura 21, que trata do caso nominal.

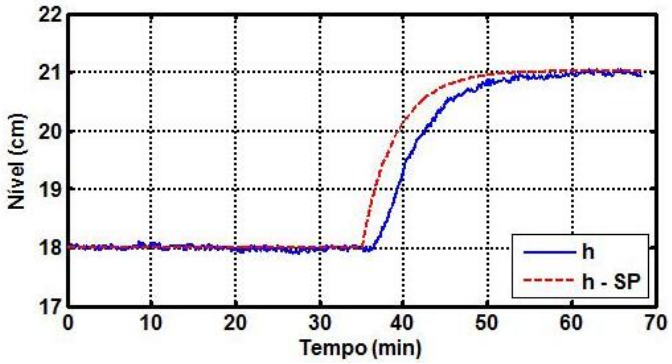



Figura 23. Comportamento do nível simulado e *setpoint* (SP) – LMI-RMPCR – caso politopo.

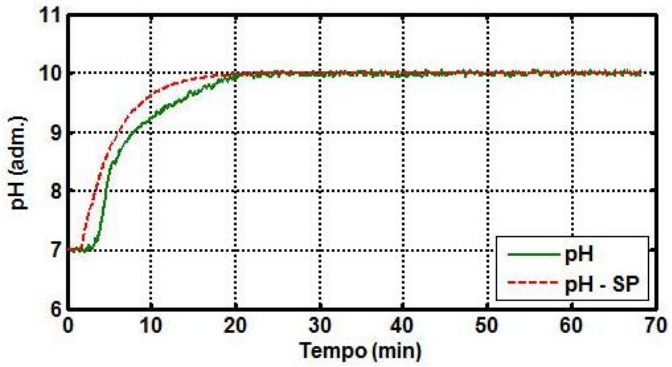



Figura 24. Comportamento do pH simulado e *setpoint* (SP) – LMI-RMPCR – caso politopo.

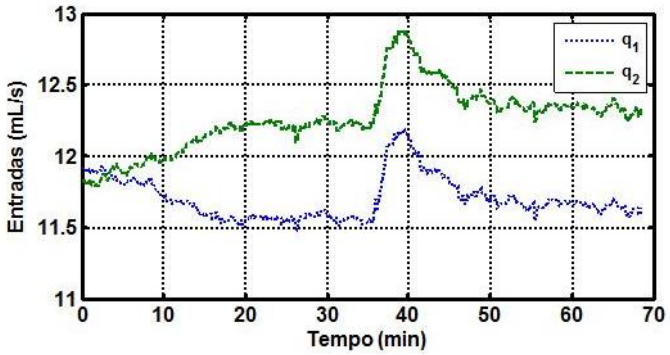



Figura 25. Variável manipulada em relação aos valores calculados pelo LMI-RMPCR (SP) – caso politopo.

De forma a comparar as resposta obtidas, é mostrado na Tabela 3 os indicadores integrais calculados para os controladores estudados. Indica-se por IAE (*Integral of the Absolute Value of the Error*), ISE (*Integral of the Squared error*) e ITAE (*Integral of the time-weighted Absolute Error*)) (Stephanopoulos, 1984). O cálculo foi feito para as variáveis de saída do processo (pv), conforme:

$$IAE_j = \sum_{i=0}^{tf} |e_{i,j}| \Delta t_i \qquad (68)$$

$$ISE_j = \sum_{i=0}^{tf} (e_{i,j})^2 \Delta t_i \qquad (69)$$

$$ITAE_j = \sum_{i=0}^{tf} t_i |e_{i,j}| \Delta t_i \qquad (70)$$

Em que j=1,2 para o caso estudado, indicando as saídas *h* e *pH*, respectivamente, *tf* representa o tempo final avaliado. O índice total foi definido como:

$$\mathbf{I_{Total}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [I_j]^2} \qquad (71)$$

Em que $I_j$ representa os índices IAE, ISE e ITAE para a saída *j*.

Da Tabela 3 pode-se observar que os índices permitem concluir que os desempenhos de todos os controladores simulados foram próximos, sendo que o RMPC-MMR apresentou desempenho ligeiramente superior para o cenário investigado.

As métricas implementadas levaram a um melhor desempenho para o controle do pH, isso deveu-se a priorização de sintonia para essa variável. Para o ISE, que penaliza mais os maiores erros, o controlador LMI-RMPCR apresentou os maiores índices. O menor índice para o controle do pH nas simulações foi obtido para o ISE no controlador IHMPC, o que motivou a sua implementação experimental. Até porque esse mesmo controlador apresentou o maior índice ITAE global em simulação. É importante que se registre que os resultados experimentais foram melhorados por ajuste de sintonia do controlador para melhorar o desempenho na última transição realizada para o cenário investigado. Isso teve efeito importante principalmente no cálculo do ITAE.

Assim, vê-se que mesmo não tendo sido feito esforços no sentido de otimização da sintonia dos controladores, os controladores robustos apresentam desempenhos próximos.

**Tabela 3: Índices integrais para o cenário investigado com controladores.**

| Índice | IHMPC | RMPC-MMR | LMI-RMPCR | IHMPC Experimental |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{ISE_1}$ | 19,126 | 11,953 | 19,300 | 22,198 |
| $\mathbf{ISE_2}$ | 6,586 | 7,865 | 15,273 | 3,523 |
| $\mathbf{ISE_{Total}}$ | 20,228 | 14,308 | 24,618 | 22,476 |
| $\mathbf{IAE_1}$ | 38,309 | 34,978 | 36,239 | 64,177 |
| $\mathbf{IAE_2}$ | 25,697 | 27,579 | 32,724 | 15,547 |
| $\mathbf{IAE_{Total}}$ | 46,129 | 44,543 | 48,828 | 66,033 |
| $\mathbf{ITAE_1\ (x10^3)}$ | 6,544 | 5,754 | 6,234 | 4,449 |
| $\mathbf{ITAE_2(x10^3)}$ | 2,696 | 2,919 | 2,556 | 1,053 |
| $\mathbf{ITAE_{Total}(x10^3)}$ | 7,077 | 6,452 | 6,738 | 4,572 |

## 7 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados permitem concluir que:

- As respostas de simulação das saídas dos sistemas submetidos aos controladores se mostraram adequadas e satisfatórias;
- As respostas dos controladores robustos desenvolvidos demonstraram desempenhos semelhantes ao algoritmo clássico IHMPC.
- As respostas teóricas e experimentais do controlador IHMPC foram satisfatórias. O ajuste do controlador para operação em tempo real se mostrou adequado.
- Baseado nas respostas do sistema experimental submetido ao controle IHMPC foi definida que uma incerteza na entrada representativa desse sistema é de 2% do valor de entrada.
- As respostas da aplicação dos controladores LMI-RMPC e RMPC-MMR ao sistema experimental mostraram-se satisfatórias do ponto de vista de simulação.
- O RMPC-MMR com incerteza na entrada limitada a 2% foi calculado dentro do tempo de amostragem e com desempenho satisfatório;

Sugere-se para trabalhos futuros a utilização dos controladores robustos desenvolvidos em modelos empíricos, como por exemplo, modelos neuronais e o estudo experimental de controle robusto associado a controle tolerante a falhas juntamente com a análise e melhoria do esforço computacional no sentido de reduzir o tempo de processamento dos controladores robustos.

## 8 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., BALAKRISHNAN, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, Philadelfia, 1994.

CAMACHO, E. F., BORDONS C. (1999) Model Predictive Control, Barcelona, Espanha: Springer.

BADGWELL, T. A. Robust Model Predictive Control of Stable Linear Systems, Int. J. Control. v. 68, p. 797-818, 1997a.

BEMPORAD A., MORARI M. Robust Model Predictive Control: A Survey. In: GARULLI A., TESI A., VICINO A. ROBUSTNESS IN IDENTIFICATION AND CONTROL. Lectures notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, v. 245, p. 207-226, 1999.

DE OLIVEIRA, S., MORARI, M. Robust Model Predictive Control for Nonlinear Systems With Constraints. In: ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES, Kyoto, Japan, p. 295-300, 1994.

EATON, J. W., RAWLINGS, J. B. Model-Predictive Control of Chemical Process. Chemical Engineering Science, v. 47, Nº 4, p. 705-720, 1992.

GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., CHILALI, M. LMI Control Toolbox for Use With Matlab, The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.

GHAOUI, L. EL, NICULESCU, S. Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, Philadelphia, 2000.

GRIEDER, P., PARRILO, P. A., MORARI, M. Robust Receding Horizon Control – Analysis & Synthesis. In: PROCEEDINGS OF THE 42ND IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, Maui, Hawaii-USA, p.941-946, 2003.

HALL, R. C. Development of a Multivariable pH Experiment, M.Sc. Thesis, University of California, Santa Barbara, California, USA,1987.

HENSON, M. A., SEBORG, D. E. Nonlinear Process Control, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

KAILATH, T. Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

LEE, J.H., COOLEY, B. L. Min-Max Predictive Control Techniques for Linear State-Space System With a Bounded Set of Input Matrices. Automatica, v. 36, p. 463-473, 2000.

LÖFBERG J. Minimax Approaches to Robust Model Predictive Control. Phd Thesis. Linköping, Sweden, 2003.

LØVAAS, C., SERON, M. M., GOODWIN, G. C. Inverse Minimax Optimality of Model Predictive Control Policies. Systems & Control Letters, 31-38, 2009.

MACIEJOWSKI, J. M. Predictive Control With Constraints, Pearson Education Limited, 2002.

MAYNE D.Q., RAWLINGS J. B., RAO C. V., SCOKAERT P. O. M. Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality, Automatica, v. 36, pp. 789-814, 2000.

MUSKE, K. R., RAWLINGS, J. B. Model Predictive Control With Linear Models. AIChE Journal, v. 39, Nº 2, p. 262-287, 1993a.

RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J. L., PAPON, J. Model Predictive Heuristic Control, Automatica, Vol. 14, pp. 413-428, 1978.

RICHARDS, A., HOW, J. P. Analytical Performance Prediction for Robust Constrained Model Predictive Control. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, Providence, Rhode Island, 2004.

SILVA, C H. F. Uma Contribuição ao Estudo de Controladores Robustos, PhD Thesis, Universidade Federal de Uberândia, Uberlândia, 2009.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G, OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto Baseado em Inequações Matriciais Lineares Aplicado a Máquinas Síncronas. Revista Ciências Exatas, v. 13, nº 1, p. 121-129, 2007.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M. CONSTRAINED ROBUST Model Predictive Control for Linear Systems. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Química, Curitiba, 2004a.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G Controle Preditivo Robusto de Pequenas Centrais Hidrelétricas. IV Seminário Nacional de Controle e Automação, Salvador, 2005.

SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. Multivariable Feedback Control: analysis and design, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1997.

STEPHANOPOULOS, G.. Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

.

# SOBRE O AUTOR

Cláudio Homero Ferreira da Silva é Engenheiro Químico (UFU, 2000), Mestre (UFU, 2002) e Doutor (UFU, 2009) em Desenvolvimento de Processos Químicos – Controle Preditivo e Preditivo Robusto. Possui especializações na area técnica e educacional além de diversas outras formações de nivel superior na area de educação. Atualmente é analista de estratégia na Cemig.